On shape derivative and free-boundary problems in vortex dynamics(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Uda, Tomoki

学 位 審 査 報 告 書

（ふりがな） 氏　　　　名	うだ　ともき 宇田　智紀
学位（専攻分野）	博　士　（　理　学　）
学　位　記　番　号	理　博　　第　　　　号
学位授与の日付	平成　　年　　月　　日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研　究　科・専　攻	理学研究科　数学・数理解析　専攻

（学位論文題目）

On shape derivative and free-boundary problems in vortex dynamics

（形状微分と渦力学における自由境界問題について）

論文調査委員	（主査）　坂上　貴之　教授 上田　哲生　教　授 國府　寛司　教　授

理　学　研　究　科

（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	宇田　智紀
論文題目	On shape derivative and free-boundary problems in vortex dynamics		

（論文内容の要旨）

形状微分とは，曲線や曲面といった「形状」を表す関数に対する汎関数（例えば曲線に囲まれた面積などは形状の汎関数と見なせる）の Gateaux 微分として定義され，様々な偏微分方程式の自由境界問題の解を形状に関する変分問題として構成する際に用いられる解析手法の一つであり．近年，自然現象を記述すする様々な自由境界問題の数値解法としてこの形状微分を用いることが盛んに行われている．

本論文の目的は，この形状微分の手法を用いて，二次元オイラー方程式の一意時間大域弱解を構成する一定渦度を持つ有界領域（渦斑解という）の定常解を求めることである．渦斑定常解を求める問題は有界領域の境界閉曲線を変数とする積分方程式として定式化されるため，形状微分を用いてその近似解を数値的に構成することが期待される．

まず本主要論文では二次元曲線に関する形状微分に関して知られている結果を簡単にサーベイし，次に今回対象とする渦斑定常解問題への困難について記している．すなわち，積分方程式の積分核の中に二次元空間のラプラス作用素に由来する対数特異性が存在しており，従来知られている形状微分の手法でこの方程式を解くことは困難となっている．そのため，これまでの渦斑定常解を求める数値計算では，形状微分を用いることはできず，この対数特異性を避けるよう離散化を行ったり正則化を行うなどの問題ごとの場当たり的な対処療法が採られてきた．その結果として，一般に渦斑定常解を数値的に解く上では大きな近似誤差が伴う上に，複雑な境界をもつ一般の二次元領域において渦斑定常解の近似解を求めることは，その対数特異性の取り扱いが複雑になりすぎるため，大きな数学的・数値的困難を伴うものであった．

これに対して，宇田智紀氏はこの積分核の対数特異性を取り除く新しい形状微分公式を見出すことに成功した．この公式は対数特異性を持つどのような積分核にも使えるため，従来のような問題毎の対応が全く不要になった．さらに，簡便な複素数表示を与えているため，その数値計算への実装も極めて容易である．また得られる数値解法は形状微分に基づいたニュートン法による近似となっているため，適切に初期値を選べば極めて早い収束が得られ，応用上も非常に好ましいものとなっている．本形状微分の公式を与えたことが本論文の主要結果の一つである．

本論文の後半では，得られた形状微分公式を用いて渦斑定常解を計算している．まずは，この数値計算法の精度や有効性を確認するために，R. Pierrehumbert の渦斑ペアや D. Crowdy が得た周辺に多角形点渦を伴う定常渦斑解の解析表示といった既知の渦斑定常解をこの手法で再構成し，それらとの比較によって，その収束が早いこと，および非常に少ない曲線の近似点数で，近似精度が丸め精度の範囲にまで正確に近似されていることなどを確認した．

宇田智紀氏は，さらに進んでこの解法を用いて，二重周期境界条件 (Flat torus) 上の定常渦斑解の構成を行った．二重周期境界条件を持つ領域での点渦（渦度が一点δ関数分布とした解）の定常配置については，これまで，Tokachenko などの結果が知られているが，渦領域が面積を持つ渦斑定常解についてはこれまで構成が困難とされてきた．その困難の一つが，二重周期境界条件下でのラプラス作用素のグリーン関数が楕円関数によって与えられ，それによって構成される定常渦斑解の積分方程式の積分核には対数特異性を持つ積分核が現れるということである．また，速度場が二重周期性を持つように流れ場を補正するための外部流れを解析的に構成する必要もあり，この点も別の数学的困難となっている．

これに対して，宇田氏の提案した形状微分法はその数学的記述の一般性のため容易にこのような複雑な境界条件の問題にも適用できる．また，点渦系で知られている二重周期点渦定常解の議論を一般化して，二重周期渦斑解の記述に必要な外部流れ場の構成にも成功した．

その数値計算手法を用いて，様々な形状を持つ二重周期境界条件を持つ定常渦斑解系列の構成を行なった．この系列では渦斑領域の面積が大きくなって，二重周期境界に近づくにつれて，その形状が菱形形状に収束していくことがわかった．また，こうした系列とは全く異なる形状を持つ渦斑解系列の存在を数値的に確認することにも成功した．このような全く未知の渦斑定常解を多数，系統的に構成することに成功したことが本論文のもう一つの主要結果である．

以上が本論文の主要結果である．

（続紙 3 ）

（論文審査の結果の要旨）

宇田智紀氏は，形状微分を用いた対数特異性を持つ積分方程式の簡便な数値解法を提案し，それを用いてこれまでに知られていなかった多くの定常渦斑解の構成に成功した．この成果は，数学的にもまた応用上も重要な結果である．

本手法が対象としている特異積分方程式が持つ対数特異性は二次元ラプラス作用素のグリーン関数に由来するものである．そのためこの論文で取り扱われた流体問題への応用にとどまらず，多くの物理現象に関わる自由境界問題への拡張が可能となっている．また，このような新しい形状微分による数学的定式化を用いることにより，自由境界問題に対する精度保証付き数値計算へとつながることも期待され，これは数値解析の大きな潮流を作るであろう．また，得られた公式は非常に簡便であり，誰にでも利用しやすいものであるため，今後多くの特異積分方程式の自由境界問題の数値解法として世界標準となるであろう．

数理流体力学への貢献についても大きいものである．渦斑解は二次元オイラー方程式の時間大域的な一意存在を保証する関数空間のクラスに入っており，この渦斑の運動を知ることは二次元非粘性非圧縮流体の挙動を力学系理論で調べることつながるものである．ここで得られた定常渦斑解の系列を微小摂動したときの安定性の問題，そしてその後の時間発展問題への形状微分の応用なども今後の拡がりを持つものである．

二次元非粘性・非圧縮流体における点渦解や渦斑解は古典的によく研究されているが，多くは非常の簡単な境界条件のもとで，それらを扱うことしかできなかった．点渦解については過去 15 年の多重連結領域のラプラス作用素のグリーン関数の解析表示に端を発する数学的な進展とともに多くの定常解を得ることが近年できるようになったが，渦斑解については決定的な手法が存在しなかった．本論文の成果はこの問題を完全に解決するものであり，点渦で得られた定常解を種として，これから非常に多くの非自明な定常渦斑解が構成されることとなり，流体モデルとしての渦斑解の構成にも大きく資するものである．

よって，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める．また，論文内容とそれに関連した事項について平成 29 年 1 月 20 日に試問を行った結果，合格と認めた．

要旨公開可能日：　　　年　　　月